ゲージ接続の発散とその幾何(非線型可積分系の研究の現状と展望)

数理解析研究所講究録
822 巻 1993 年 95-109

ゲージ接続の発散とその幾何

日大・文理　鈴木 理 (Osamu Suzuki)

(要約) ゲージ接続を"分解による方法"によりとりあつかい次の事柄を示す:

(I) ゲージ接続に発散がないとき，平担な接続に拡張される。

(II) ゲージ接続に発散があるとき，発散に曲率を対応させる事ができる。

以上により，曲率は本質的には発散より生じ，これをもとにして"発散の幾何"が考えられる。ここでは場の演算子とその期待値についてこの問題を考える。前者はBott-Chernの定理の一般化であり，後者はDeligneの定理そのものである。この両者を比較することにより場の正則化の問題をとりあつかう。

(内容)

§1. 分解によるゲージ接続の幾何と平担拡張定理

ここでは分解によりゲージ接続の幾何をのべ，最後に平担拡張定理を示す。

《ゲージ分解》 $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{m}$ を $\mathbb{C}$-線形空間とし，$\mathfrak{a} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ とおく。H を群とする。A を代数とし，$G(A) = \{g \in A \mid \exists g^{-1} \in A\}$ とする。$\mathrm{End}\,A = \{\varphi : A \to A : \text{線形}\}$，$\mathrm{Der}\,A = \{\delta : A \to A \mid \delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)\}$ とする。次の表現が与えられているとする。

(i) $\delta : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathrm{Der}\,A$ ($\mathbb{C}$-線形) 及び $\eta : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{End}\,A$ で $\delta(\mathfrak{m}) \oplus \eta(\mathfrak{h}) \subset \mathrm{End}\,A$ となる，

(ii) $\tau : H \longrightarrow G(A)$ で $\mathrm{Ad}_{\tau(g)}\, \delta(\mathfrak{m}) \oplus \eta(\mathfrak{h}) \subseteq \delta(\mathfrak{m}) \oplus \eta(\mathfrak{h})$ ($\forall g \in H$) がなりたつ。

以下 $\mathrm{Ad}_{\tau(g)}\eta(x)$ を $\mathrm{Ad}_g x$，$\delta(X) = \delta_X$，$\mathrm{Ad}_{\tau(H)}\, \eta(\mathfrak{h})$ を $\mathrm{Ad}_H \mathfrak{h}$ とかく。次の定義を与える：

定義(ゲージ分解) $(\mathfrak{a}, H)_A$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ がゲージ分解であるとは (i) $\mathrm{Ad}_H \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$，(ii) $g \delta_X g^{-1} = \delta_X - [\delta_X, g] g^{-1}$ ($\forall g \in H, \forall X \in \mathfrak{m}$) がなりたつこととする。

$\mathfrak{m}$: 水平方向，$\mathfrak{h}$: 垂直方向，H: ゲージ群という。

ゲージ分解の間に準同型が定義される：$(\mathfrak{a}_i, H_i)_{A_i}$ $(i=1,2)$ をゲージ分解とし，(i) $\alpha : \mathfrak{a}_1 \longrightarrow \mathfrak{a}_2$ $(\alpha(\mathfrak{h}_1) \subseteq \mathfrak{h}_2,\ \alpha(\mathfrak{m}_1) \subseteq \mathfrak{m}_2)$ (ii) $\beta : H_1 \longrightarrow H_2$，(iii) $\gamma : A_1 \longrightarrow A_2$ を代数的な準同型とし，$\varphi = (\alpha, \beta, \gamma)$ がゲージ分解の準同型であるとは，

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_1 & \xrightarrow{\delta_1 \oplus \eta_1} & A_1 \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ \mathfrak{a}_2 & \xrightarrow{\delta_2 \oplus \eta_2} & A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\tau} & G(A_1) \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ H_2 & \xrightarrow{\tau} & G(A_2) \end{array}$$

を可換図式とすることである。これより，同型，拡大，制限が定義される。例として，テイラー拡大をのべる。

$(\mathfrak{a}, H)_A$ をゲージ分解とする。

$$\mathfrak{a}(\lambda) = \mathfrak{h}(\lambda) + \mathfrak{m}$$

$$\mathfrak{h}(\lambda) = \left\{ \sum \xi_n \lambda^n \mid \xi_0 \in \mathfrak{h},\ \xi_n \in \mathfrak{a}\ (n \geqq 1) \right\}$$

$$H(\lambda) = H \cdot H'(\lambda)$$

$$H'(\lambda) = \left\{ \sum \xi_n \lambda^n \mid \xi_0 = 1,\ \xi_n \in \mathfrak{a}\ (n \geqq 1) \right\}$$

とおくと，$(\mathfrak{a}(\lambda), H(\lambda))_{A(\lambda)}$ はゲージ分解となり，$(\mathfrak{a}, H)_A$ の拡大を与えている。

《ゲージ接続の幾何》 $(\mathfrak{a}, H)_A$ をゲージ分解とする。$\rho : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を線形写像とする。$(\mathfrak{a}, H ; \rho)_A$ を ρ を接続形式とする<u>ゲージ接続</u>という。

(1) $\tilde{\mathfrak{m}} = \{ \delta_X + \rho(X) \mid X \in \mathfrak{m} \}$ を<u>水平リフト</u>という

(2) $\rho(X) = W^{-1}([\delta_X, W]W^{-1} - \Omega_X(W))W$ により $\Omega:$ $\mathfrak{m}\times G \longrightarrow \mathfrak{g}$ を定める。 $\nabla_X^{(W)} = \delta_X - \Omega_X(W)$ を共変微分という。

(3) $W = W(t)(\in H)$を未知関数とする方程式

$$dL/dt + [\Omega_X(W), L] = 0 \quad (L = WXW^{-1})$$

を測地線の方程式という。

定義(平担な接続) $(\mathfrak{A}, H : \rho)_A$ が平担なゲージ接続であるとは,

$$\rho(X) = [\delta_X, W_0]W_0^{-1}$$

となる $W_0 \in H$が存在することである。W_0を平担化元という。

次の定理がなりたつ:

定理(平担拡張定理)

$(\mathfrak{A}, H : \rho)_A$ をゲージ接続とする。或る拡大$(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{H})^{*}_{\tilde{A}}$及びそのテイラー拡大$(\hat{\mathfrak{A}}(\lambda), \hat{H}(\lambda))_{\tilde{A}(\lambda)}$で$(\hat{\mathfrak{A}}(\lambda), \hat{H}(\lambda), \lambda\rho)$が平担となるものが存在する。

§2. 発散のあるゲージ接続

場の量子論には発散をもつゲージ接続がよくあらわれる。ここでは発散のあるゲージ接続の定義をのべ，この様な接続は発散を認めると平担化元が存在するかどうかを考える。いわゆるBott－Chernの定理である。これは§3で考える。

＊ この拡大は$\{\delta_X\}$の擬微分作用素拡大を考えることにより得られる。

《発散のあるゲージ接続の例ー共形場》

$\mathfrak{a}_B = \{ a_n, \quad | [a_n, a_m] = \delta_{m+n,0} (n \in \mathbb{Z}^*) \}$ をボーズ場とする。共形場を分解によりのべる:

$$\mathfrak{g} = \{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n z^n \mid \xi_n \in \mathfrak{a}_B \}$$

$$\mathfrak{m} = \{ \bigoplus \mathbb{C} L_n \mid L_n = z^{-n} \frac{\partial}{\partial z} \quad n \in \mathbb{Z} \}$$

$$H = \{ g \in \mathfrak{g} \mid {}^{\exists} g^{-1} \in \mathfrak{g} \}$$

とおくと, $(\mathfrak{a}, H)_A$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ $(A = \mathfrak{g})$ はゲージ分解となる, 但し, $\delta_n = [L_n, \ ]$ として作用するものとする。$\mathfrak{m}$ のかわりに Virasoro 代数をとることもある。次の接続を考える:

$$\rho(L_0) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1} + \sum_{n<0} n a_n z^{n-1}$$

$\rho(L_n) = z^{-n} \rho(L_0)$ と定める。このとき, 次の事柄がなりたつ:

命題 $\quad \rho^{(N)} = \sum_{n>0}^{N} a_n z^{n-1} + \sum_{n<0}^{-N} n a_n z^{n-1}$

$$g^{(N)} = \exp\left(\sum_{n<-1}^{-N} a_n z^n\right) \exp\left(\sum_{n>1}^{N} \frac{a_n}{n} z^n\right)$$

とおくと, $\partial g^{(N)} \cdot g^{(N)^{-1}} = \rho^{(N)} + \frac{1}{z} \Gamma^{(N)}$, $\Gamma^{(N)}$ は定数であり, $\lim_{N\to\infty} \Gamma^{(N)} = \infty$ となる。

これを用いると, $\rho^{(N)} = \partial W^{(N)} \cdot W^{(N)^{-1}}$ であり, かつ $\lim_{N\to\infty} W^{(N)} = W^*$ が存在し, $\rho(L_0) = \partial W^* \cdot W^{*-1}$ をみたす W^* は

存在しないことが示される。そこで

定義(発散のあるゲージ接続) $(\mathfrak{a}, H : \rho)_A$ をゲージ接続とする。ρ が $(\mathfrak{a}, H)_A$ で発散しているとは，ρ の平担化元が H に存在しないこととする。

§1の結果より，A が代数であるなら，すべてのゲージ接続には平担化元がみつかるから，発散のあるゲージ接続を考えるには，代数構造をもたない A に対してゲージ分解，接続を定めなくてはならない。これは実行可能であるが，これについてはのべないことにする。次の事柄がなりたつ：

命題 $(\mathfrak{a}, H ; \rho)_A$ を一般なゲージ接続とする。ゲージ接続 ρ が発散をもたないための充分条件は，(i) $\delta u = v$ $(v \in A)$ が解をもつ (ii) $\rho u \in A$ がなりたつことである。

系. 代数に表現されているゲージ分解については，すべての接続は発散をもたない。

§3. Bott–Chern の定理

多様体上のベクトル束のゲージ接続は曲率があるとき，特異点をみとめると平担化されることが知られている。これを Bott–Chern の定理という。ここでは，この定理が一般のゲージ接続についてなりたつかを考える：

《例》 前節でのべた接続について発散をもつ平坦化元を作る。そのために，z, ζ を複素変数として，

$$\mathfrak{g} = \left\{ \sum_{n,m \geq 0} a_{nm} z^n \zeta^m \ \middle|\ a_{nm} \in \mathfrak{a}_B \right\}$$

$$\mathfrak{m} = \left\{ \oplus L_n(z) \oplus L_m(\zeta) \ \middle|\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$H = \left\{ g \in \mathfrak{g} \ \middle|\ \exists g^{-1} \in \mathfrak{g} \right\}$$

とおくとき，$(\mathfrak{a}, H)_A$，$\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ はゲージ分解となり，

$$\rho(\tilde{L}_0) = \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} + \sum_{n<0} n a_n z^{n-1}$$

$$\tilde{L}_0 = 1/2(\partial/\partial z + \partial/\partial \zeta)$$

とおく。$\zeta = z$ とおくと，§2の接続となることに注意する。このとき，

命題 $\tilde{W} = W \cdot \exp\left(\frac{\zeta+z}{2(\zeta-z)}\right)$，$W = \exp\left(\sum_{n<0} a_n z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \frac{a_n}{n} \zeta^n\right)$

とおくと，

$$\delta_{\tilde{L}_0} \tilde{W} \cdot \tilde{W}^{-1} = \rho(\tilde{L}_0)$$

がなりたつ。

従って，発散のある元を用いると，平坦化されることが分かる。これはいわいるBott-Chernの定理の類似物と考えることができる。

《Bott-Chernの定理》

$\pi : E \longrightarrow M$ を複素多様体上のヘルミート的なベクトル束とする。$\omega = \partial h \cdot h^{-1}$ をヘルミート的接続とする。$\Theta = d\omega - \omega \wedge \omega$

をその曲率とする。$c_k(\Theta)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ を k-th Chern形式とする。$E^*=E-\{0\}$ とし, $\pi':E^*\longrightarrow M$ とおく。次の事柄がなりたつ:

定理 (Bott-Chern)

$$\pi'^* c_k(E) = d\eta \qquad \eta \in \Gamma(E^*, \pi'^*(E)\otimes\Lambda^{2k-1})$$

がなりたつ。但し, η は一般に $\{0\}$ に特異点をもつ。

上の定理の内容をみるために, M = リーマン面, E = 正則な線束とする。このとき, 次の事柄がなりたつ:

(1) $\pi'^*\omega = dh\cdot h^{-1}$ となる h が E^* 上に存在する。すなわち, ω は E^* 上では平坦である。但, h は零sectionで特異性をもつ。

(2) $\pi'^*(E)$ は E^* 上の自明な線束である。

(3) $\forall\varphi\in\Gamma(M, \mathcal{O}(E))$ は $\varphi^*\in\Gamma(E^*, \pi'^*(E))$ を用いて

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\varepsilon}\varphi^*/\zeta\cdot d\zeta$$

として得られる。

(4) (1)を用いると指数定理 i.e., $\sum \mathrm{Index}\,\varphi = \int_{C_1} c_1(\Theta)$ が示せる.

(注意) Bott-Chernの定理をオイラー方程式とするラグランジュ形式は Wess-Zumio-Witten のラグランジュ形式とみなせる。

§4 演算子の期待値とDeligne の定理

ここでは場の演算子の期待値について Bott-Chern型の定理を示す。これがDeligne の定理とよばれているものであり，発散と曲率との関係を与えるものになっている。

まず確定特異点を持つ微分方程式について少し思いだしておく。Φを$M\setminus Y$上で定義された有理型関数とし，高々Yに確定特異点をもつ多価関数とする。このとき

$$\Omega = d\Phi \cdot \Phi^{-1}$$

とおくと，対数型の特異性を有つM上の有理形式となる。又Φの定めるモノドロミー表現を

$$\rho : \pi_1(M\setminus Y) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

とするとき，これより，局所平坦なベクトル束E_ρが得られる。このとき，Ωはその接続を定める。次の定理がなりたつ：

定理 (Deligne)

(i) E_ρはM上の正則なベクトル束$E^* \longrightarrow M$に拡大される。

(ii) E^*のmetrical接続$\omega(=\partial h \cdot h^{-1})$とするとき，

$$\Omega \sim \omega \quad \text{on } M\setminus Y$$

がなりたつ。

この定理を用いると，場の演算子の期待値に曲率を対応させることができる。相互作用する場の演算子が与えられているとし、例えばボーズ場であるとする，その場の演算子を $\varphi(x)$ とする。一般に場の演算子の積 $\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)$ は $x_1 = x_2$ では定義されない。所が演算子展開定理を思いおこすと，

$$\Phi(z_1, \cdots, z_N) = \langle 0 | \varphi(z_1)\cdot\varphi(z_2)\cdots\varphi(z_N)|0\rangle$$

は一般に $\{z_i = z_j\}$ $(i \neq j)$ 上に確定型の特異点を有している。従って，この Φ に前にのべたDeligne の定理を応用すると，Φ に対して，線束 $E^* \longrightarrow M$ 及びその接続 ω が対応できる。しかも (ii) より，

$$\omega = d\Phi\cdot\Phi^{-1}$$

であり，従って，発散のある元 Φ で平坦化が与えられることも示される。これも又1種のBott-Chern型の定理といえる。この場合のBott-Chern の定理は，Otuki（大槻）により与えられている。Y は normal crossing となる特異性をもつとしてよい。そうでないときは，広中の定理を用いればよい。Y の既約成分を $Y^1, Y^2, \cdots, Y^n, \cdots$ とし，$\rho(\gamma^i) = M_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ とする。ここで γ^i は Y^i をひとまわりする道である。このとき次の定理がなりたつ：

定理 (Otuki)

$c_k(\Theta)$ を E^* の k-th Chern 形式とすると

$$c_k(\Theta)=\sum_{\alpha_1\le\cdots\le\alpha_k} c_k(M_{\alpha_1},\cdots,M_{\alpha_k})\prod_{j=1}^{k} c_1([Y_{\alpha_j}]^{-1})$$

がなりたつ。

これを用いると Bott-Chern の定理も再現できる。
最後に幾つか例をのべておしまいとする:

例1. $W = \exp\left(\sum_{n<0} a_n z^n\right)\exp\left(\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}\zeta^n\right)$

とおくとき.

$$\delta_{\Gamma_0} W\cdot W^{-1} = \rho(\Gamma_0)+\frac{1}{z-\zeta}$$

であり

$$\langle 0|W|0\rangle = \frac{\zeta}{z-\zeta}$$

がなりたつ。このとき

$$d\Phi = \Omega\Phi \qquad \left(\Phi = \frac{\zeta}{z-\zeta}\right)$$

$$\Omega = \frac{-\zeta}{z-\zeta}dz-\frac{1}{\zeta}d\zeta-\frac{1}{z-\zeta}d\zeta$$

となり. これに対しては,

$$E^* = \mathcal{O}(\{z=0\})^{-1}\otimes\mathcal{O}(\{z=\zeta\})$$

が対応するものと思われる。

例2. より一般に

$$W(z,\zeta:\alpha) = \exp\left(\alpha\sum_{n<0} a_n z^n\right)\exp\left(\alpha\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}\zeta^n\right)$$

とするとき,

$$\langle 0|W(z_1,\zeta_1:\alpha_1)\cdots W(z_N,\zeta_N:\alpha_N)|0\rangle$$
$$=\Phi(z_1,\zeta_1,\cdots,z_N,\zeta_N)$$

とおくとき

$$d\Phi=\Omega\Phi$$
$$\Omega=\sum\frac{\Omega_{ij}}{z_i-\zeta_j}dz_i+\sum\frac{\Omega'_{ij}}{z_i-\zeta_j}d\zeta_j$$

となる。これに対して E^* はどの様になるであろうか? これについては少し立入った考察が必要なようである。

§5. ゲージ接続の正則化

以上の様に発散するゲージ接続にベクトル束及びその接続を対応させることが可能になると, これをもとにしてボーズ場の有つ発散をフェルミ場の発散により打ち消すことができるのではないかと想像させる。この考えは何も新しいものではなく, 超対称性やB.R.S.対称性のゴースト場や, ボーズ・フェルミ対応を思うと極めて自然であると思われる。ここでは, この可能性を少し追求してみようと思う。

相互作用するボーズ場が与えられているとする。このN-点関数 $\Phi^{(N)}(x_1,\cdots,x_N)=\langle 0|\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle$ が与えられる。これに対して $\Omega^{(N)}=d\Phi^{(N)}\cdot\Phi^{(N)-1}$ は E_p の有理接続を定める。次にこれからフェルミ場を作ろう。$\nabla^{(N)}=d+\Omega^{(N)}$ と

おくと，　$\nabla^{(N)}: \Gamma(M\setminus Y, \mathcal{O}(E_\rho)) \to \Gamma(M\setminus Y, \mathcal{O}(E_\rho)\otimes T^*)$
であり

$$\nabla^{(N)^2} = 0$$

となる。これを用いるとフェルミ場が定められる。このフェルミ場は最初に与えられたボーズ場と同じ型の発散を有しているから，この両者を自由場として couple させるなら，発散はキャンセルできるものと思われる。こうして N－点相互作用についてのみ考えるなら，"正則化"は可能であろうと思われる。そこですべての N－点関数について発散は正則化されるであろうか？ この問題を考えるためには各 N についてベクトル束 $E_\rho^{(N)}$，及びその拡大 $E^{(N)*}$ 及び接続を考えなくてはならない。これは経路積分による定式化の数学版が必要になるものと思われる。曲率についてはもはや発散をもたないので数学的なとりあつかいもかなり現実感のあるものとなるだろうと予想されるがこれを考察するには到っていない。いづれにしろこの問題を考察することはくりこみ算の数学を考えることと深く関係しており重要なものとおもわれる。最後にこれが可能であろうことを予想させる例をのべる：

前にのべた共形場を思いだす。

$$\rho(\mathcal{T}_0) = \delta_{\mathcal{T}_0} W \cdot W^{-1} + \frac{1}{z-\zeta}$$

であった。そこでフェルミ場を

$$\psi(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_n z^n \qquad \psi^+(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_n^+ z^{-n}$$

$$\{\psi_n, \psi_m^+\}=\delta_{m,n}$$

により導入する。このとき

$$\frac{1}{\zeta}\psi(z)\psi^+(\zeta)=\frac{1}{z-\zeta}$$

となり $\rho(\Gamma_0)$ と同じ発散をもつ。ζ^{-1} をつけたくないときには

$\psi^+(z)=z^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_n^+ z^{-n}$ をとればよい。このとき

$$W_{フェルミ}=\exp\left(\int\frac{1}{\zeta}\psi(z)\psi^+(\zeta)\,(dz+d\zeta)\right)$$

とおくと、

$$\widetilde{W}=W\cdot W_{フェルミ}^{-1}$$

とおくと

$$\delta_{\Gamma_0}\widetilde{W}\cdot\widetilde{W}^{-1}=\rho^*(\Gamma_0)$$

はもはや発散を有しておらず平坦なゲージ接続とみなすことができる。これはボーズ場とフェルミ場が発散を媒介として同等であることを示している。これはボーズ・フェルミ対応の幾何学的な理解を与えている。

引用文献

(1) Bott-Chernの定理について

Bott, R., and Chern, S.S.,: Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeros of their holomorphic sections, Acta Math. 114 (1965)

(2) 確定型特異点をもつ微分方程式について

(i) Deligne, P.: Equations differentielles á points singulieres régulieres, Lecture Notes in Math. 163. Springer, (1970)

(ii) Suzuki, O.: The problems of Riemann-Hilbert and the relation of Fuchs in several complex variables, Lecture Notes in Math. 712, Springer (197･)

(3) Abelian bosonaizationsについて

Date, E., Kashiwara, M., Jimbo, M., and Miwa, T.,: Transformation Groups for soliton equations, in Integrable Systems - Classical Theory and Quantum Theory, eds. M. Jimbo and T. Miwa, World Scientific Publ. (1983)

(4) ゲージ理論に於ける分解の方法について

Suzuki, O., Lawrynowicz, J., and Kalina, J.: A geometric approach to the Kadomtsev-Petviasvili system (II), The. Inst of National Sciences, Nihon Univ. 20.(1991)